TITLE:

Commutative Algebra for Combinatorialists(Combinatorial Theory and Related Topics : Mutual Relation among Commutative Algebra,Algebraic Geometry,Representation Theory of Lie Algebras and Partially Ordered Sets)

AUTHOR(S):

日比, 孝之

CITATION:

日比, 孝之. Commutative Algebra for Combinatorialists(Combinatorial Theory and Related Topics : Mutual Relation among Commutative Algebra,Algebraic Geometry,Representation Theory of Lie Algebras and Partially Ordered Sets). 数理解析研究所講究録 1988, 670: 1-41

ISSUE DATE:

1988-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/100761

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
670巻 1988年 1-41

Commutative Algebra for Combinatorialists

日比孝之（名古屋大学理学部）
Takayuki Hibi

序. m行r列の整数行列 $\Phi=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq r}}$ が与えられた時, Φから定まる整数係数の連立線型diophantine方程式系

$$\Phi\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

の非負整数解全体の集合をE_Φで表そう：

$$E_\Phi := \left\{ (\beta_1, \cdots, \beta_r) \in \mathbb{N}^r \,;\, \Phi\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \mathbb{O} \right\}$$

この時, E_Φに関して何が言えるか？——という問掛は, 不変式論・線型計画法や組合せ論, 更には, 可換環論等の諸分野に於いて, 自然発生するきわ

めて素朴なものである。

今，$(0,\cdots,0)\neq\beta\in E_\Phi$ が基本解であるとは，$\beta=\gamma+\delta$ $(\gamma,\delta\in E_\Phi)$ ならば $\gamma=\beta$ または $\delta=\beta$ である ―― という条件が満たされる時を言うことにし，E_Φ の基本解の全体を $FUND_\Phi$ で表そう。すると，E_Φ を知ることと $FUND_\Phi$ を知ることは同値である。そして，いわゆる "Hilbertの基底定理"（可換環論の言葉では，体 k 上の r-変数多項式環 $k[x_1,x_2,\cdots,x_r]$ が Noether環である ―― と述べられる定理）が，$FUND_\Phi$ は有限集合である ―― ということを保証している。［じゃあ，有限集合であるならば，$FUND_\Phi$ を具体的に記述したい ―― ということは，誰もが感じる誘惑であろう。］

本稿では，線型diophantine方程式系を媒介とした可換環論と組合せ論の接点 ―― という観点に立脚し，可換環論，特にCohen-Macaulay環の理論から，E_Φ に関して得ることのできる情報を記述し，その "数え上げ" の組合せ論への応用例として，凸多面体に含まれる有理点の数え上げを考察する。

第1節 連立線型diophantine方程式系

本節の目標は連立線型diophantine方程式系の非負整数解に関する(母関数の範疇で捕えた)既知の結果を詳述することにある。可換環論の技巧を駆使することによって証明される事実が強調したい内容であるが、それらの証明及び背景となる可換環論の骨格は第2節で述べる。可換環論と聞いただけで吐き気を催す combinatorialists は第1節を読んだ後に直ちに第3節を読んでも差し障りのないように配慮する。

なお、$\mathbb{N}$で非負整数の全体の集合を表す。また、Xが有限集合の時、Xに含まれる元の個数を$\#(X)$と書くことにする。

a) 基本解

整数a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq r)$を係数とする連立線型diophantine方程式系

$$(\star)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mr}x_r = 0 \end{cases}$$

の係数行列を $\Phi=(a_{ij})_{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq r}}$ とする。(☆) の非負整数解，即ち，$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\in\mathbb{Z}^r$，$\beta_i\geqq 0$ $(1\leqq i\leqq r)$ で

$$\Phi\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{bmatrix}=0$$

を満たすものの全体を E_Φ で表す。以下，

$$d := r-(\Phi\text{の階数})$$

と置き，また (☆) は非自明 (i.e., $\neq(0,\cdots,0)$) な非負整数解を持つと仮定する。[注意：このような仮定は，組合せ論の現場に適応する際には，何らの障害にはならない。]

さて，$(0,\cdots,0)\neq\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_r)\in E_\Phi$ が E_Φ の基本解であるとは，$\gamma,\delta\in E_\Phi$ が $\beta=\gamma+\delta$ を満たせば，$\gamma=\beta$ または $\delta=\beta$ が成立する時を言う。E_Φ の基本解の全体の集合を FUND_Φ で表す。古典的な不変式論で得られた重要な成果は，Hilbertの基底定理と呼ばれる次の事実である：

(1.1) 命題. $\#(\mathrm{FUND}_\Phi)<\infty$

ところで，$E_\Phi(\subset \mathbb{N}^r)$は，$\mathbb{N}^r$の通常の（成分ごとの）加法で零元を持つ可換な半群となる。この時，FUND_ΦはE_Φの半群としての生成系に他ならない。すると，(1.1)を群の言葉で述べると，

(1.2) 系．半群E_Φは有限生成である。

b) 重量写像

写像$w : E_\Phi \to \mathbb{N}$が$E_\Phi$上の重量写像であるとは，次の条件が満たされる時を言う：

(i) $w(\beta)=0$となるのは$\beta=(0,\cdots,0)$かつその時に限る。

(ii) 等式$w(\alpha+\beta)=w(\alpha)+w(\beta)$が任意の$\alpha,\beta\in E_\Phi$に対して成立する。

いちばん簡単なE_Φ上の重量写像は，任意の$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$に対して$w(\beta)=\beta_1+\cdots+\beta_r$で定義したものである。

さて，E_Φ上の重量写像wが与えられた時，$w(\beta)=n$となる$\beta\in E_\Phi$の全体の集合を$E_{\Phi,w}(n)$で表す。以下，興味の対象となるのは，数列

$\{\#(E_{\Phi,w}(n))\}_{n=0,1,2,\cdots}$ の母関数

$$F_{\Phi,w}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \#(E_{\Phi,w}(n))\lambda^n$$

である。

(1.3) 定理. d 個の正の整数 $e_1, e_2, \cdots, e_d$ を適当に選べば

$$\prod_{i=1}^{d}(1-\lambda^{e_i})\ F_{\Phi,w}(\lambda)$$

は 非負整数を係数とする λ の多項式となる。

C) 正解

さて, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_r)\in E_\Phi$ が 正解 であるとは, $\beta_i>0$ が任意の $1\leqq i\leqq r$ に対して成立する時を言う。そして, E_Φ の正解の全体の集合を E_Φ^* で表す。任意の $\beta\in E_\Phi$ の第 j 成分 β_j が常に $\beta_j=0$ であるならば,(☆)において, $a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0$ とした連立線型 diophantine 方程式系を考えればよい。従って, 任意の $1\leqq j\leqq r$ に対して $\beta_j>0$ となる

$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_r)\in E_\Phi$が存在すると仮定してよい。すると、一般性を失なうことなく、E_Φ^*は空集合ではないと仮定してもよいということだ。

他方、$E_\Phi\subset\mathbb{N}^r$を零元を持つ可換な半群と考えると、$E_\Phi^*$は$E_\Phi$の半群としてのidealである。即ち、$\beta\in E_\Phi^*$，$\alpha\in E_\Phi$ならば$\alpha+\beta\in E_\Phi^*$となるのである。

E_Φ上の重量写像wが与えられた時

$$E_{\Phi,w}^*(n)=E_{\Phi,w}(n)\cap E_\Phi^*\quad(n=1,2,\cdots)$$

と置き、更に

$$F_{\Phi,w}^*(\lambda):=\sum_{n=1}^{\infty}\#\left(E_{\Phi,w}^*(n)\right)\lambda^n$$

としよう。この時、

(1.4) 定理 (Stanley[7]).

$$F_{\Phi,w}^*(\lambda)=(-1)^d F_{\Phi,w}(\lambda^{-1})$$

(1.5) 系. (1.3)に於けるλの多項式$\prod_{i=1}^{d}(1-\lambda^{e_i})F_{\Phi,w}(\lambda)$の次数は$<\sum_{i=1}^{d}e_i$である。

次に、E_Φの半群としてのideal $\mathfrak{V}$がE_Φ^*の<u>模倣</u>であるとは、$\delta \in E_\Phi$が存在して

$$E_\Phi^* = \{\beta+\delta \; ; \; \beta \in \mathfrak{V}\}$$

となる時を言う。この時、δを$\mathfrak{V}$の<u>shifting</u>と呼ぶ。また、

$$C_w(\mathfrak{V}) := \min\{w(\beta) \; ; \; \beta \in \mathfrak{V}\}$$

と置く。もちろん

$$C_w(\mathfrak{V}) = C_w(E_\Phi^*) - w(\delta)$$

である。すると、

$$F_{\mathfrak{V},w}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \#(\mathfrak{V} \cap E_{\Phi,w}(n))\lambda^n$$

と定義すれば

(1.6) 系.

$$F_{\mathfrak{V},w}(\lambda) = (-1)^d \lambda^{-(C_w(E_\Phi^*)-C_w(\mathfrak{V}))} F_{\Phi,w}(\lambda^{-1})$$

d) 完全基本解

$\beta \in FUND_\Phi$が<u>完全基本解</u>であるとは、整数$n>0$と$\gamma, \delta \in E_\Phi$が$n\beta = \gamma+\delta$を満たせば、$\gamma = n_1\beta$となる$0 \leqq n_1 \leqq n$が存在する

時を言う。E_Φの完全基本解の全体を$\mathcal{CF}_\Phi$で表す。この時、

(1.7) 補題. 任意の$\beta \in E_\Phi$に対して、適当に整数$m>0$を取れば、$m\beta$は完全基本解の和として(必ずしも一意的とは限らないが)書ける。

(1.8) 命題. E_Φ上の重量写像wが任意の$\beta \in \mathcal{CF}_\Phi$に対して$w(\beta)=1$を満たす(この時、$w$を良好重量写像と呼ぶ。)と仮定せよ。すると、(1.3)に於て$e_1=e_2=\cdots=e_d=1$と選べる。

(1.9) 系. E_Φ上の重量写像wは良好であると仮定せよ。この時、非負整数$h_0, h_1, \cdots, h_{d-1}$が存在して

(*) $(1-\lambda)^d F_{\Phi,w}(\lambda) = h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_{d-1}\lambda^{d-1}$

となる。

連立方程式(☆)が与えられた時、一般には、E_Φ上の良好重量写像 w が存在するか否かを判定することは困難である。なお、(1.7)によって、E_Φ上の良好重量写像は存在すれば一意的である。

(1.10) 例(魔法陣) 図-1の有限graphから連立線型diophantine方程式系

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_6 \\
&= x_5 + x_6 = x_4 + x_5 = x_7 + x_8 \\
&= x_8 + x_9 = x_2 + x_7 + x_9
\end{aligned}
$$

を考える。この時、任意の $\beta \in CF_\Phi$ に対して $w(\beta) \leqq 2$ となるE_Φ上の重量写像 w は存在するが、良好重量写像は存在しない。

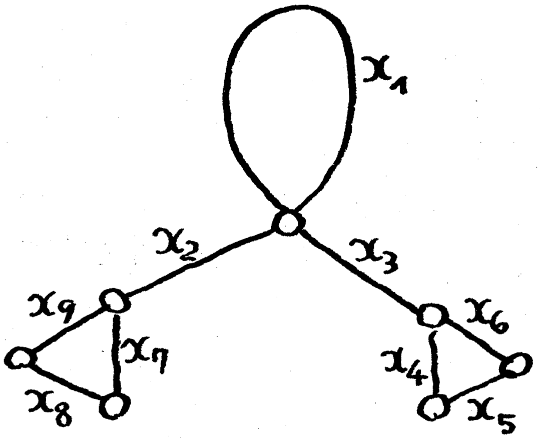


図-1

(1.11) 例 (P-分割). 図-2の有限半順序集合から連立線型diophantine方程式系

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_4=x_2+x_5 \\ x_5+x_7=x_6+x_8 \end{cases}$$

を作る。この時、$\mathrm{FUND}_\Phi=\mathrm{CF}_\Phi$ であって、しかも E_Φ 上の良好重量写像が存在する。

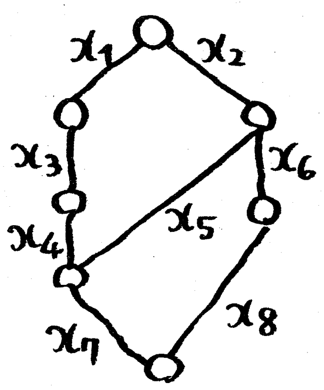


図-2

e) (☆)に随伴する有限数列

連立線型diophantine方程式系(☆)の非負整数解の全体 E_Φ 上に良好重量写像が存在する時、(1.9)の(*)で定まる非負整数 $h_0, h_1, \ldots, h_{d-1}$ が興味の対象となる。以下、

$$s=\max\{i\,;\,h_i\neq 0\}$$

と置く。すると、(1.4)より

(1.12) 補題. $c_w(E_\Phi^*) = d-s$

(1.13) 命題 (Stanley). 任意の $0 \leqq i \leqq [s/2]$ に対して、不等式

$$h_0+h_1+\cdots+h_i \leqq h_s+h_{s-1}+\cdots+h_{s-i}$$

が成立する。

一般に、

$$sq(\Phi) := \min\{c_w(U) ;\ U\text{は}E_\Phi^*\text{の模倣}\}$$

と置く。すると、

(1.14) 命題. $q = sq(\Phi)$ と置くと、任意の $0 \leqq i \leqq [(s-q)/2]$ に対して、不等式

$$h_s+h_{s-1}+\cdots+h_{s-i}$$
$$\leqq h_0+h_1+\cdots+h_i+(h_{i+1}+\cdots+h_{i+q})$$

が成立する。

(1.15) 系. 任意の $0 \leqq i \leqq [d/2]$ に対して、不等式

$$h_{d-1}+\cdots+h_{d-i} \leqq h_0+h_1+\cdots+h_i$$

が成立する。

(1.16) 系. 数列 $h_0, h_1, \cdots, h_s$ が symmetric, i.e., $h_i = h_{s-i}$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq s)$, となるための必要十分条件は, $Sq(\Phi) = 0$, 換言すれば, E_Φ が E_Φ^* の模倣となることである。

[証明] $Sq(\Phi) = 0$ とすると, (1.13) と (1.14) の御陰で $0 \leqq {}^\forall i \leqq [S/2]$ に対して, 等式

$$h_0 + h_1 + \cdots + h_i = h_s + h_{s-1} + \cdots + h_{s-i}$$

が成立する。$\therefore$ $h_i = h_{s-i}$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq s)$

逆に, $h_i = h_{s-i}$ とすると, (1.4) より

$$F_{\Phi,w}^*(\lambda) = (-1)^d F_{\Phi,w}(\lambda^{-1}) = \lambda^{c_w(E_\Phi^*)} F_{\Phi,w}(\lambda)$$

となる。そこで, $w(\delta) = c_w(E_\Phi^*)$ となる $\delta \in E_\Phi^*$ を取って, $\mathcal{U} = \{\alpha + \delta\, ;\, \alpha \in E_\Phi\}$ と置けば, $\mathcal{U} \subset E_\Phi^*$ となる。他方,

$$F_{\mathcal{U},w}(\lambda) = \lambda^{w(\delta)} F_{\Phi,w}(\lambda)$$

だから,

$$F_{\Phi,w}^*(\lambda) \; (= F_{E_\Phi^*,w}(\lambda)) = F_{\mathcal{U},w}(\lambda)$$

である。すると $\mathcal{U} \subset E_\Phi^*$ は, 実は $\mathcal{U} = E_\Phi^*$ と

なる。即ち，E_{Φ} は E_{Φ}^{*} の模倣となるわけだ。

Q.E.D.

このようにして，$Sq(\Phi)$ は (*) の多項式 $(1-\lambda)^d F_{\Phi,w}(\lambda)$ から生起する数列 $h_0, h_1, \cdots, h_s$ が symmetric であることからどの程度離れているかを表す不変量である。すると，この不変量が組合せ論の実際の現場でどの程度具体的に計算可能であるか —— ということが重要な課題となる。

第2節　可換環論

本節では，前節で述べた結果を可換環論，特に Cohen-Macaulay 環の理論を武器として証明するための骨格を築くことを目標とする。予備知識としては Atiyah-Macdonald [1] 程度を仮定する（と言っても，予備知識は殆ど仮定しなくても読めるように，できる限りの努力をする）。

a)次数環

単位元を持つ可換環 A が加法群としての直和分解 $A=A_0\oplus A_1\oplus\cdots$ を持ち $A_iA_j\subset A_{i+j}$ $(\forall i, j\geq 0)$ が成立する時，$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ を<u>次数環</u>と言う。更に，$A_0=k$ が体で，A が k-代数として有限生成の時，A を<u>G-代数</u>と呼ぶ。

さて，$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ が G-代数の時，A の元 x が<u>斉次元</u>であるとは，$x\in A_n$ となる $n\geq 0$ が存在する時を言う。この時，x の次数は n であると言い，$\deg x=n$ と書く。A は k-代数として有限生成だから，有限個の斉次元 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ $(y_i\in A_{n_i}, n_i>0)$ が存在して，A は k-代数として，$y_1, y_2, \cdots, y_r$ で生成される。特に，$y_1, y_2, \cdots, y_r$ を A_1 から選べる時，A を<u>標準G-代数</u>と呼ぶ。

一般に，G-代数 $A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ が与えられた時，k 上 A_1 で生成される A の部分 k-代数 $k[A_1]$ を B とすると，B は A の次数付けを継承して自然に G-代数の構造 $\bigoplus_{n\geq 0}B_n$，

$B_n \subset A_n$，を持つ。もちろん，Bは標準G-代数である。我々は，AがB-加群として有限生成の時，Aを擬標準G-代数と呼ぶことにする。すると，

(2.1) 補題([1,(5.2)]). Aが擬標準G-代数であるための必要十分条件は，Aのk-代数としての生成系$y_1, y_2, \cdots, y_v$で各y_iがB上整となるものが存在することである。

b) 正規化定理

G-代数$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$の次元$\dim A$とは，$k$上代数的独立な$A$の斉次元の最大個数を表す。

さて，Noether正規化定理とは，

(2.2) 命題(cf. [1, p.69]). $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$を$d$次元の$G$-代数とせよ。この時，$A$の斉次元$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d$ (Aの巴系と呼ぶ)で次の条件を満たすものが存在する：

(i) $\theta_1, \cdots, \theta_d$は$k$上代数的独立。

(ii) A は $k[\theta_1,\cdots,\theta_d]$-加群として有限生成である。

(2.3) 補題. $A=\oplus_{n\geq 0}A_n$ が標準 G-代数で $A_0=k$ が無限体の時, A の巴系は A_1 から選べる。

(2.4) 系. $A=\oplus_{n\geq 0}A_n$ が擬標準 G-代数で $A_0=k$ が無限体の時, A の巴系は A_1 から選べる。

C) 正則列

$A=\oplus_{n\geq 0}A_n$ を G-代数とする。$\theta\in A_n$ が A の <u>非零因子</u> であるとは, $\theta\cdot x=0$ ($x\in A$) ならば $x=0$ であるということが成立する時を言う。また, A の斉次元の列 $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_t)$, $\theta_i\in A_{n_i}$ ($n_i>0$), が A の <u>正則列</u> とは, 各 θ_i が $A/(\theta_1,\cdots,\theta_{i-1})$ で非零因子である時を言う。そして, t を正則列 $\underline{\theta}$ の長さと呼ぶ。

(2.5) 補題．$\underline{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_t)$ が A の正則列であれば，$\theta_1,\cdots,\theta_t$ は k 上代数的独立である。

そこで，Aに含まれる正則列の最大の長さをAの<u>深さ</u>と呼び $\operatorname{depth} A$ で表すことにすれば，

(2.6) 系．$\operatorname{depth} A \leqq \dim A$

d) Hilbert 関数

G-代数 $A=\oplus_{n\geqq 0}A_n$ は $A_0=k$ 上の代数として有限生成であったから，各 A_n は k 上の vector 空間として有限次元である。そこで，

$$H(A,n):=\dim_k A_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

と置き，$H(A,n)$ を A の <u>Hilbert 関数</u>と呼ぶ。更に，数列 $\{H(A,n)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ の母関数

$$F(A,\lambda):=\sum_{n=0}^{\infty} H(A,n)\lambda^n$$

を A の <u>Poincaré 級数</u> と言う。

さて，一般に，$A=\oplus_{n\geqq 0}A_n$ の ideal I が<u>斉次 ideal</u> であるとは，$I=\oplus_{n\geqq 0}(I\cap A_n)$ が

成立すること，換言すれば，I が斉次元で生成される時を言う。この時，

$$F(I,\lambda):=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dim_{q}(I\cap A_n)\right]\lambda^n$$

と置く。他方，剰余環 A/I には A の次数付が遺伝し，再び G-代数となる。

(2.7) 補題. I が A の斉次 ideal の時

$$F(A,\lambda)=F(A/I,\lambda)+F(I,\lambda)$$

である。

そこで，$\theta\in A_m$ $(m>0)$ を A の非零因子としよう。すると，

$$F((\theta),\lambda)=\lambda^m F(A,\lambda)$$

となるから，

(2.8) 系. $\theta\in A_m$ $(m>0)$ が A の非零因子の時，

$$F(A/(\theta),\lambda)=(1-\lambda^m)F(A,\lambda)$$

である。

(2.9) 系. $\underline{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_t)$ がAの正則列で $\theta_i\in A_{e_i}$ $(e_i>0)$ であれば、

$$F(A/(\theta_1,\cdots,\theta_t),\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(1-\lambda^{e_i})\,F(A,\lambda)$$

が成立する。

e) Cohen-Macaulay環

G-代数Aが $\operatorname{depth} A=\dim A$ を満たす時Aは<u>Cohen-Macaulay環</u>であると言う。

(2.10) 命題. AがCohen-Macaulay環であれば、Aの任意の巴系は正則列である。

(2.11) 系. AがCohen-Macaulay環, $\dim A=d$, の時、整数 $e_1, e_2, \cdots, e_d$ $(e_i>0)$ が存在して、

$$\prod_{i=1}^{d}(1-\lambda^{e_i})\,F(A,\lambda)$$

は非負整数を係数とするλの多項式となる。

[証明] Aの巴系 $\theta_1,\cdots,\theta_d$ $(\theta_i\in A_{e_i}, e_i>0)$

を取ると、$\underline{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ は A の正則列となる。すると、(2.9) より

$$F(A/(\theta_1,\cdots,\theta_d),\lambda)=\prod_{i=1}^{d}(1-\lambda^{e_i})\,F(A,\lambda)$$

となる。ところが、A は $k[\theta_1,\cdots,\theta_d]$-加群として有限生成であったから、$A/(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ は k 上の vector 空間として有限次元である。特に、任意の $n\gg 0$ に対して $\dim_k[A/(\theta_1,\cdots,\theta_d)]_n=0$ となる。すると $F(A/(\theta_1,\cdots,\theta_d),\lambda)$ は λ の多項式であり、λ^i の係数 $\dim_k[A/(\theta_1,\cdots,\theta_d)]_i$ はもちろん非負整数である。 Q.E.D.

(2.12) 系. $A=\oplus_{n\geq 0}A_n$ が Cohen-Macaulay 擬標準 G-代数で $\dim A=d$ であれば

$$(1-\lambda)^d F(A,\lambda)$$

は非負整数を係数とする λ の多項式である。

〔証明〕 $A_0=k$ が有限体ならば、k の拡大体 K で無限体であるものを考え、A の代わりに係数拡大 $A\otimes_k K=\oplus_{n\geq 0}(A_n\otimes_k K)$ で仕事をすればよいから、最初から k は無限体であると

仮定してよい。すると(2.4)によって，A_1から巴系が選べるから，(2.11)で各$e_i=1$とすることが可能である。　　　　　Q.E.D.

f) 弱規準ideal

Cohen-Macaulay環の範疇に於て，更に際立った性質を持つものとして，Gorenstein環がある。Gorenstein環を解説するには，canonical module(規準加群)の理論に触れなければならないが，理論的に煩く言うと，煩雑になる恐れがあるので，本稿では，天下り的に導入することを試る。

さて，$A=\oplus_{n\geq 0}A_n$を$\dim A=d$なるCohen-Macaulay G-代数とする。Aの斉次ideal Iが次の条件を満たす時，IをAの<u>弱規準ideal</u>と呼ぶ：

(i) $F(I,\lambda)=(-1)^d\lambda^a F(A,\lambda^{-1})$　　$^{\exists}a\in\mathbb{Z}$

(ii) $I\subsetneq A$であればA/Iは$d-1$次元のCohen-Macaulay環である。

(2.13) 命題. Cohen-Macaulay G-代数 A が整域であれば，Aには弱規準idealが存在する。

実は，Aが整域の時には，弱規準idealは，Aのcanonical module K_Aと同型になる([9,(4.4)],[3,(1.7)])。

以下，Aの弱規準idealの存在を仮定して議論を進めたいので，それを保証するために，整域となるCohen-Macaulay G-代数を考察の対象とする。

一般に，Aの斉次ideal $I=\oplus_{n\geq 0}(I\cap A_n)$に対して

$$c(I):=\min\{n\ ;\ I\cap A_n\neq(0)\}$$

と置く。そして，整域であるCohen-Macaulay G-代数 $A=\oplus_{n\geq 0}A_n$に対して，不変量 $sq(A)$を

$$sq(A):=\min\left\{c(I)\ ;\ \begin{array}{l}I\text{は}A\text{の弱}\\ \text{規準ideal}\end{array}\right\}$$

で定義する。

すると，$sq(A)=0$ということは，A自身が

Aの弱規準idealとなることを意味する。この事実は，AがGorenstein環である――ということと同値であるが，本稿では，Gorenstein環には深入りしない。

ところで，$A=\bigoplus_{n\geqq 0}A_n$ がCohen-Macaulay擬標準G-代数で，$\dim A=d$ ならば，(2.12)によって，$(1-\lambda)^d F(A,\lambda)$ は非負整数を係数とするλの多項式である。そこで，

$$(1-\lambda)^d F(A,\lambda)=h_0+h_1\lambda+\cdots+h_s\lambda^s$$

$(h_s\neq 0)$ となる時，$h(A):=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ をAの <u>h-vector</u> と呼ぶことにする。すると，$h_0=1$，$h_1=H(A,1)-d$ である。

(2.14) 補題．擬標準G-代数 $A=\bigoplus_{n\geqq 0}A_n$ はCohen-Macaulay整域であると仮定せよ。この時，Aのh-vector $h(A)=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ がsymmetric，i.e.，$h_i=h_{s-i}$ $(0\leqq{}^\forall i\leqq s)$ であるための必要十分条件は，$SG(A)=0$ となることである。

[証明] $\dim A = d$, $a = d-s$ と置くと

$$F(A, \lambda^{-1}) = (-1)^d \lambda^a \frac{h_s + h_{s-1}\lambda + \cdots + h_0\lambda^s}{(1-\lambda)^d}$$

となることに注意すればよい。　Q.E.D.

(2.15) 命題. 擬標準G-代数 $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ は Cohen-Macaulay 整域であると仮定し, $q =$ $Sq(A)$ と置く。この時, A の h-vector $h(A) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ に関する不等式

$$h_s + h_{s-1} + \cdots + h_{s-i}$$
$$\leq h_0 + h_1 + \cdots + h_i + (h_{i+1} + \cdots + h_{i+q})$$

が任意の $0 \leq i \leq [(s-q)/2]$ に対して成立する。

[証明] $Sq(A) = 0$ の時は (2.14) によって明白。$Sq(A) > 0$ の時は, $c(I) = q$ となる A の弱規準 ideal I を取ると, 擬標準G-代数 A/I が $d-1$ 次元 Cohen-Macaulay環となることから, $(1-\lambda)^{d-1} F(A/I, \lambda)$ は非負整数を係数とする λ の多項式となる。そこで, (2.7) によって, $F(A/I, \lambda)$ を $F(A, \lambda)$ と

$$F(I,\lambda)=(-1)^d\lambda^{q-(d-s)}F(A,\lambda^{-1})$$
$$=\lambda^q\cdot\frac{h_s+h_{s-1}\lambda+\cdots+h_0\lambda^s}{(1-\lambda)^d}$$

で計算する。しからば，$(1-\lambda)^{d-1}F(A/I,\lambda)$の$\lambda^{i+q}$の係数が非負ということが所期の不等式に他ならない。　　　　Q.E.D.

(2.16) 命題(Stanley). 擬標準G-代数AはCohen-Macaulay整域であると仮定し，$h(A)=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$をAのh-vectorとせよ。この時，不等式

$$h_0+h_1+\cdots+h_i\leqq h_s+h_{s-1}+\cdots+h_{s-i}$$

が任意の$0\leqq i\leqq[s/2]$に対して成立する。

g) Hochster-Stanleyの理論

さて，第1節の記号を踏襲し，連立線型diophantine方程式系(☆)を考える。零元を持つ可換な半群$E_\Phi\subset\mathbb{N}^r$と$E_\Phi$上の重量写像$w$から次の様にして自然にG-代数$A_{\Phi,w}$が構成できる。まず，r個の変数$z_1,z_2,\cdots,z_r$を準備して，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\in E_\Phi$に対して，単項式

$$z^{\beta} := \prod_{i=1}^{r} z_i^{\beta_i}$$

を対応させる。そして，$\{z^{\beta} ; \beta \in E_{\Phi,w}(m)\}$ なる単項式の集合が張る k 上の vector 空間を $(A_{\Phi,w})_m$ と書き，それらの直和 $\bigoplus (A_{\Phi,w})_m$ を $A_{\Phi,w}$ と定義する。すると，E_{Φ} が半群であることと及び重量写像の定義より，$A_{\Phi,w}$ は $(A_{\Phi,w})_0 = k$ なる次数環である。他方，$\{z^{\beta} ; \beta \in FUND_{\Phi}\}$ は $A_{\Phi,w}$ の k-代数としての生成系となるから，(1.1) より $A_{\Phi,w}$ は G-代数である。そして，$A_{\Phi,w}$ の G-代数としての次元は $d = r - (\Phi$の階数$)$ と一致する。

さて，(2.1) より

(2.17) 補題 $A_{\Phi,w} = k[\{z^{\beta}\}_{\beta \in FUND_{\Phi}}]$ はその部分 k-代数 $k[\{z^{\beta}\}_{\beta \in CH_{\Phi}}]$ 上の加群として有限生成である。

(2.18) 定理 (Hochster [5]). $A_{\Phi,w}$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2.19) 定理(Stanley [9]). $\mathcal{V}$ が E_Φ^* の模倣 ideal の時, $\{z^\beta\}_{\beta\in\mathcal{V}}$ が生成する $A_{\Phi,w}$ の次数 ideal は $A_{\Phi,w}$ の弱規準 ideal である。

第3節 凸多面体に含まれる有理点の数え上げ問題

"数え上げ" の組合せ論とは, 離散的な数学現象に自然に現れる有限集合の族 $\mathcal{A}=\{A_0, A_1, \cdots, A_m\}$ に対して, 集合 A_i の要素の個数を a_i とすることによって生起する数列 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ を研究対象とする学問である。

本節では, 連立線型 diophantine 方程式系の理論の応用として, 凸多面体に含まれる有理点の数え上げの問題を考察する。

a) 凸多面体の有理点

凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ が <u>整凸多面体</u> であるとは, $\mathcal{P}$ の任意の頂点が $\mathbb{Z}^N$ に含まれる時

を言う。$\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^N$ が d 次元整凸多面体の時 $n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$i(\mathcal{P},n):=\#(n\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^N)$$

と置く。ただし，$n\mathcal{P}=\{n\alpha\,;\,\alpha\in\mathcal{P}\}$ である。換言すれば，$i(\mathcal{P},n)$ は $\mathcal{P}$ に含まれる有理点 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\in\mathbb{Q}^N$ で $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ の共通分母として n が取れるものの個数である。関数 $i(\mathcal{P},n)$ は Ehrhart, Macdonald, McMullen Stanley 等によって研究されている。

さて，$i(\mathcal{P},n)$ を直接扱うよりも

$$\omega(\mathcal{P},\lambda):=(1-\lambda)^{d+1}\sum_{n=0}^{\infty}i(\mathcal{P},n)\lambda^n$$

を考察するのが好都合である。

若干の例を挙げよう。$N=2$ の時は，簡単な受験問題である。図-3の凸多面体を $\mathcal{P}$ とすると，$n\mathcal{P}$ とは $(0,0),(5n,0),(4n,3n),(0,4n)$ を頂点とする四角形の周及び内部であるから，それに含まれる $\mathbb{Z}^2$ の点の個数を計算すると，

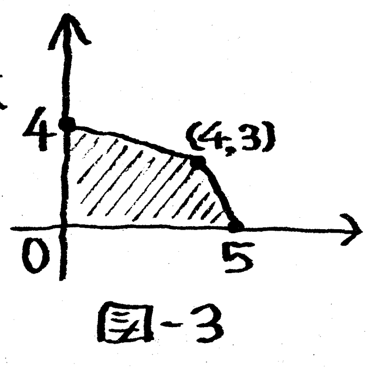


図-3

$i(\mathcal{P}, n)=(31n^2+11n+2)/2$ 。すると $\omega(\mathcal{P}, \lambda)=1+19\lambda+11\lambda^2$ である。N=3になると計算はちょっと複雑になる。図-4の(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)を頂点とする凸多面体を $\mathcal{P}$ とすると、$\omega(\mathcal{P}, \lambda)=1+\lambda^2$ である。

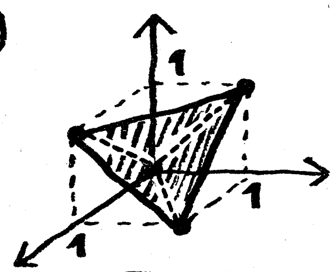


図-4

他方、$\mathbb{R}^N$ の単位立方体 $\{(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)\in\mathbb{R}^N; 0\leqq\alpha_i\leqq 1\ (i=1,2,\cdots,N)\}$ を $\mathcal{P}$ とすれば、$i(\mathcal{P}, n)=(n+1)^N$ がすぐわかる。この時、$\omega(\mathcal{P}, \lambda)$ の係数には、N次対称群 $\mathfrak{S}_N$ のEuler数(e.g., [11, p.22])が登場する。また、N=5とし、$(\alpha_1, \cdots, \alpha_5)\in\mathbb{R}^5$ で不等式

$$0\leqq\alpha_1\leqq\alpha_3\leqq 1$$
$$0\leqq\alpha_2\leqq\alpha_3\leqq 1$$
$$0\leqq\alpha_2\leqq\alpha_4\leqq\alpha_5\leqq 1$$

を満たす点の全体から成る凸多面体を $\mathcal{P}$ とすると、$\mathcal{P}$ の頂点を計算するだけでも煩雑であるが、結果を書けば、$\omega(\mathcal{P}, \lambda)=1+5\lambda+3\lambda^2$ となる。

b) $\omega(\mathcal{P}, \lambda)$ の係数

$i(\mathcal{P}, n)$ は $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^N$ を平行移動しても不変

であるから，以下，d次元整凸多面体$\mathcal{P}$は$\mathcal{P}\geqq 0$，i.e.，$\mathcal{P}$に含まれる任意の点$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$の各座標$\alpha_i\geqq 0$である――と仮定する。

さて，$\mathcal{P}$は

$$(*)\begin{cases} b_{11}\alpha_1+\cdots+b_{1N}\alpha_N\leqq c_1\\ \quad\cdots\cdots\\ b_{M1}\alpha_1+\cdots+b_{MN}\alpha_N\leqq c_M\end{cases}$$

を満たす$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\in\mathbb{R}^N$の集合であると仮定せよ。ただし$b_{ij}$，$c_i$は整数である。この時，$x_1,\cdots,x_N$，$y$を変数とする連立線型diophantine方程式系

$$(**)\begin{cases} b_{11}x_1+\cdots+b_{1N}x_N\leqq c_1y\\ \quad\cdots\cdots\\ b_{M1}x_1+\cdots+b_{MN}x_N\leqq c_My\end{cases}$$

を考えると，

(3.1) 補題．$(\beta_1,\cdots,\beta_N,n)\in\mathbb{N}^{N+1}$が$(**)$の解であることと，$(\beta_1,\cdots,\beta_N)\in n\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^N$は同値である。

[証明] $(\beta_1, \cdots, \beta_N, n) \in \mathbb{N}^{N+1}$ を $(**)$ の解とし，$n>0$ とせよ。すると，$(\beta_1/n, \cdots, \beta_N/n)$ は $(*)$ を満たすから，$(\beta_1/n, \cdots, \beta_N/n) \in \mathcal{P}$，従って $(\beta_1, \cdots, \beta_N) \in n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N$ である。他方，$\mathcal{P}$ は有界であることに注意すれば，任意の $(0, \cdots, 0) \neq (\beta_1, \cdots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$ は適当な $1 \leqq i \leqq M$ に対して $\sum_{j=1}^{N} b_{ij}\alpha_j > 0$ となる。すると，$(\beta_1, \cdots, \beta_N, 0) \in \mathbb{N}^{N+1}$ が $(**)$ の解ならば各 $\beta_j = 0$ である。　　Q.E.D.

そこで，新しい変数 $z_1, \cdots, z_M$ を導入して，$(**)$ から，連立線型 diophantine 方程式系

$$(***) \begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1N}x_N - c_1 y + z_1 = 0 \\ \quad - - - - - \\ b_{M1}x_1 + \cdots + b_{MN}x_N - c_M y + z_M = 0 \end{cases}$$

を構成すると，

(3.2) 系. $(\beta_1, \cdots, \beta_N, n, \gamma_1, \cdots, \gamma_M) \in \mathbb{N}^{N+M+1}$ が $(***)$ の解となるための必要十分条件は $(\beta_1, \cdots, \beta_N) \in n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N$ となることである。

さて、(***) の係数行列を $\Phi(\mathbb{P})$ で表し、$E_{\Phi(\mathbb{P})}$ や $E^*_{\Phi(\mathbb{P})}$ 等の記号は第1節をそのまま踏襲する。

(3.3) 補題.

$$(N+M+1)-(\Phi(\mathbb{P})\text{の階数}) = d+1$$

(3.4) 補題. 写像 $w: E_{\Phi(\mathbb{P})} \to \mathbb{N}$ を

$$w((\beta_1,\cdots,\beta_N,n,\gamma_1,\cdots,\gamma_M)) = n$$

と定義すれば、w は $E_{\Phi(\mathbb{P})}$ 上の重量写像である。

(3.5) 命題. $(\beta_1,\cdots,\beta_N,n,\gamma_1,\cdots,\gamma_M) \in E_{\Phi(\mathbb{P})}$ が完全基本解となるための必要十分条件は、$n=1$ で $(\beta_1,\cdots,\beta_N) \in \mathbb{R}^N$ が $\mathbb{P}$ の頂点となることである。

(3.6) 系. (3.4) の重量写像 w は良好である。

以上の準備によって、(1.9) と (1.15) の御利益(ごりやく)が $\omega(\mathbb{P},\lambda)$ に授(さず)けられる。即ち、

(3.7) 定理．$\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^N$を任意の$d$次元整凸多面体と仮定せよ。この時，$\omega(\mathcal{P},\lambda)$は非負整数を係数とする$\lambda$の多項式でその次数は高々$d$次である。しかも$\omega(\mathcal{P},\lambda)=\sum_{i=0}^{d}h_i\lambda^i$とすると，不等式

$$h_d+h_{d-1}+\cdots+h_{d-i}$$
$$\leqq h_0+h_1+\cdots+h_i+h_{i+1}$$

が任意の$0\leqq i\leqq[(d-1)/2]$に対して成立する。

(3.8) 系．
$$i(\mathcal{P},n)=\sum_{i=0}^{d}h_i\binom{n+d-i}{d}$$
はnに関するd次の多項式（Ehrhart多項式[2]と呼ぶ）で，その最高次の係数$\omega(\mathcal{P},1)/d!$は$\mathcal{P}$の相対体積と一致する。

(3.9) 補題．$(\beta_1,\cdots,\beta_N,n,\gamma_1,\cdots,\gamma_M)\in E_\Phi$が$E_\Phi$の正解となるための必要十分条件は，$n\geqq1$でしかも$(\beta_1/n,\cdots,\beta_N/n)\in\mathcal{P}-\partial\mathcal{P}$となることである。ここで$\partial\mathcal{P}$は$\mathcal{P}$の境界である。

すると，
$$s=\max\{i\,;\,h_i\neq0\}$$

と置けば，(1.12)より

$$\begin{aligned}(d+1)-s &= c_w(E^*_{\Phi(\mathcal{P})}) \\ &= \min\left\{ m>0 \,;\, \begin{array}{l} {}^\exists\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_N)\in\mathcal{P}-\partial\mathcal{P} \\ \text{such that } m\beta\in\mathbb{Z}^N \end{array}\right\}\end{aligned}$$

となる。しかも，(1.13)より

(3.10)命題　$\omega(\mathcal{P},\lambda)=\sum_{i=0}^{d}h_i\lambda^i$，　$s=\max\{i\,;\,h_i\neq 0\}$とすると，任意の$0\leqq i\leqq[s/2]$に対して，不等式

$$h_0+h_1+\cdots+h_i\leqq h_s+h_{s-1}+\cdots+h_{s-i}$$

が成立する。

C) 順序凸多面体

$X=\{x_1,\cdots,x_d\}$を任意の半順序集合とする時，$\mathbb{R}^d$の凸多面体$\mathcal{O}_X$を

$$\mathcal{O}_X:=\left\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\in\mathbb{R}^N\,;\,\begin{array}{l}(\mathrm{i})\ 0\leqq\alpha_i\leqq 1\\ (\mathrm{ii})\ X\text{で } x_i\leqq x_j \text{ ならば } \alpha_i\leqq\alpha_j\text{ である}\end{array}\right\}$$

で定義し，これをXの<u>順序凸多面体</u>(Stanley[11, p.241])と呼ぶ。$\dim\mathcal{O}_X=d$である。例えば，

N=3とし、

$\underline{X}$ = 

図-5

とすると、

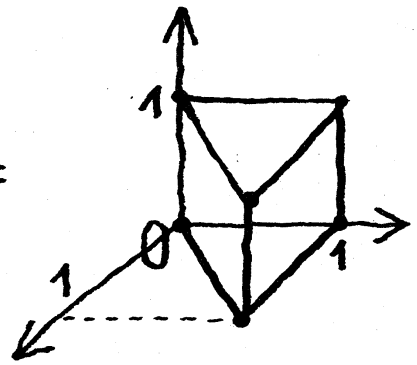
$\mathcal{O}_{\underline{X}}$ = 

図-6

となる。

さて、$\mathcal{O}_{\underline{X}}$ は $\mathbb{R}^N$ の単位立方体に含まれる整凸多面体で、その任意の頂点の座標の各成分は 0 か 1 である。今、$\mathcal{O}_X$ の頂点全体の集合 V_X に

$$(\#)\quad (\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\leqq(\beta_1,\cdots,\beta_N) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \alpha_i\leqq\beta_i \quad (1\leqq{}^\forall i\leqq N)$$

で順序を導入する。[例えば、図-6の$\mathcal{O}_{\underline{X}}$ならば半順序集合 V_X は 図-7 の分配束である。]

すると、

$V_X =$

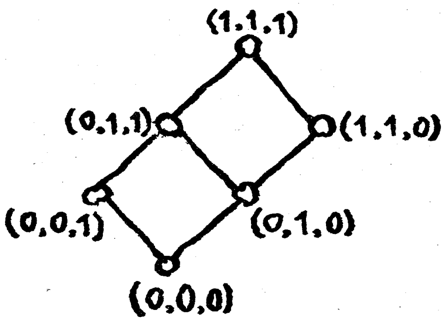


図-7

(3.11) 命題. $\mathfrak{X}$ の半順序集合としての ideal 全体の集合を $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$ で表す。$I \in \mathcal{J}(\mathfrak{X})$ の時、$x_i \in I$ (resp. $x_i \notin I$) ならば $\varepsilon_i^{(I)} = 1$ (resp. $\varepsilon_i^{(I)} = 0$) として $(\varepsilon_1^{(I)}, \cdots, \varepsilon_N^{(I)}) \in \mathbb{R}^N$ を対応させる。この時

$$V_X = \{(\varepsilon_1^{(I)}, \cdots, \varepsilon_N^{(I)}) ; I \in \mathcal{J}(X)\}$$

である。

(3.12) 系. V_X に (#) で順序を導入すれば、$\mathcal{J}(X)$ に包含関係で順序を導入した分配束と同型になる。

一般に、有限半順序集合 $\mathfrak{X}$ と非負整数 n に対して、Stanley [6] に従って

$$\Omega(X,n) := \#\left\{\sigma : X \to \mathbb{N}\ ;\ \begin{array}{l}\text{(i) } X \text{ で } x<y \text{ ならば } \sigma(x) \geqq \sigma(y) \text{ である。}\\ \text{(ii) } \max_{x\in X} \sigma(x) \leqq n\end{array}\right\}$$

と置く。すると、

(3.13) 補題. $i(\mathcal{O}_X, n) = \Omega(X, n)$

(3.14) 系. 半順序集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$ の添字は X で $x_i < y_j$ ならば $i<j$ となるように付けられていると仮定し、$\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^{d} h_i \lambda^i$ と置く。この時、h_i は d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ の元 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$ で次の条件を満たすものの個数に等しい：

(i) $x_{a_r} < x_{a_s}$ ならば $r<s$

(ii) $\#\{r\ ;\ a_r > a_{r+1}\} = i$

(3.15) 系. $\#(X)=d$, $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^{d} h_i \lambda^i$ とし、$s = \max\{i\ ;\ h_i \neq 0\}$ と置けば

$$s = (d-1) - (X\text{の階数})$$

となる。

(3.16) 系 (Stanley). $\omega(\Theta_X, \lambda) = \sum_{i=0}^{s} h_i \lambda^i$ $(h_s \neq 0)$ とする時, 数列 $(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ が symmetric であるための必要十分条件は X が純 (pure) となることである。

さて, 有限半順序集合 X が与えられた時, X に最小元 $0^\wedge$ と最大元 $1^\wedge$ を添加した半順序集合を $X^\wedge$ で表す。$X^\wedge$ に含まれる飽和な全順序部分集合の collection

$$\mathcal{A} = \{ \alpha_0^{(i)} < \alpha_1^{(i)} < \cdots < \alpha_{k_i}^{(i)} \}_{i=1,2,\cdots,t}$$

が (i) $\alpha_0^{(1)} = 0^\wedge$ (ii) $\alpha_{k_t}^{(t)} = 1^\wedge$ (iii) $\alpha_{k_{i-1}}^{(i-1)} \geq \alpha_0^{(i)}$ $(1 < {}^\forall i \leq t)$ の条件を満たす時, $\mathcal{A}$ を $X^\wedge$ の階段と呼び,

$$\ell(\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^{t} k_i$$

をその長さと言う。そして,

$$pt(X) := \min \{ \ell(\mathcal{A}) \,;\, \mathcal{A} \text{ は } X^\wedge \text{ の階段} \}$$

を X の位置 energy と呼ぶ。[例えば, 図-8 の半順序集合 X では $pt(X) = 4$, $X^\wedge$ の階数 = 8 である。]

X =

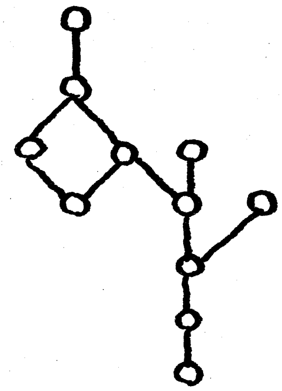


図-8

(3.17) 定理([4]).

$$sq(\Phi_{\mathcal{O}_X}) = (X^\wedge \text{の階数}) - pt(X)$$

有限半順序集合から構成される凸多面体$\mathcal{O}_X$の(Ehrhart多項式 $i(\mathcal{O}_X, n)$ 或は) $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda)$の係数から構成される数列の特徴付けを探せ——ということは"数え上げ"の組合せ論の興味ある問題である。例えば、$\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^{s} h_i \lambda^i$, $h_s \neq 0$, とした時,

(i) $h_i \leqq h_{s-i}$ $(0 \leqq \forall i \leqq [s/2])$

(ii) $h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[s/2]}$

なる不等式を予想するのはどうであろうか。

参考文献

[1] M.F.Atiyah & I.G.Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra," Addison-Wesley, Readind, Mass., 1969.

[2] E.Ehrhart, Sur un problême de géometrie diophantienne linéaire I & II, J. Reine Angew. Math. **226** (1967), 1-29 & **227** (1967), 25-49.

[3] T.Hibi, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, Nagoya Math. J. **112** (1988), to appear.

[4] ______, Linear diophantine equations and Stanley's P-partitions, in preparation.

[5] M.Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Ann. of Math. **96** (1972), 318-337.

[6] R.Stanley, Ordered structures and partitions, Mem. Amer. Math. Soc. **119** (1972).

[7] ______, Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs, Duke Math. J. **40** (1973), 607-632.

[8] ______, Magic labelings of graphs, symmetric magic squares, systems of parameters, and Cohen-Macaulay rings, Duke Math. J. **43** (1976), 511-531.

[9] ______, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. **28** (1978), 57-83.

[10] ______,Linear diophantine equations and local cohomology, Inventiones Math. **68** (1982), 175-193.

[11] ______, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wodsworth, Monterey, Calif., 1986.